

## Σειρά Προβλημάτων 2

Ημερομηνία Παράδοσης: 24/02/20

### Άσκηση 1 [12 μονάδες]

Να δώσετε κανονικές εκφράσεις που να περιγράφουν τις πιο κάτω γλώσσες.

(i)  $\{ w \mid \eta \ w \text{ είναι μια λέξη επί του αλφάβητου } \{0,1\} \text{ η οποία αναπαριστά ένα ακέραιο σε δυαδική μορφή που είναι πολλαπλάσιο του } 4 \}$

(ii)  $\{ w \in \{a,b\}^* \mid \eta \ w \text{ περιέχει τη συμβολοσειρά } ab \text{ ακριβώς } 2 \text{ φορές αλλά όχι στο τέλος} \}$

(iii)  $\{ w \in \{0,1,2\}^* \mid w = uxn, \text{ όπου } x \in \{0,1,2\}, u, v \in \{0,1,2\}^* \text{ και δεν υπάρχει σύμβολο } \gamma \text{ στην ακολουθία } v, \text{ τέτοιο ώστε, } x < \gamma \}$

(iv) Θεωρήστε έναν ανελκυστήρα που εξυπηρετεί 3 ορόφους (ισόγειο, πρώτος όροφος, υπόγειο). Χρησιμοποιούμε τα σύμβολα U και D για να περιγράψουμε ότι ο ανελκυστήρας κατεβαίνει ένα όροφο ή ανεβαίνει ένα όροφο, αντίστοιχα. Με αυτό τον τρόπο, μπορούμε να περιγράψουμε μια ακολουθία κινήσεων του ανελκυστήρα ως μια λέξη στο  $\{U,D\}^*$ . Υποθέτουμε ότι ο ανελκυστήρας ξεκινά από το ισόγειο. Τότε, η λέξη UDUDD αναπαριστά την κίνηση όπου ο ανελκυστήρας ξεκινώντας από το ισόγειο ανεβαίνει στον πρώτο όροφο, κατεβαίνει στο ισόγειο, ανεβαίνει ξανά στον πρώτο όροφο, και μετά κατεβαίνει στο υπόγειο. Η λέξη ε αντιστοιχεί στην περίπτωση που ο ανελκυστήρας δεν έχει κινηθεί. Η λέξη DD δεν αναπαριστά κίνηση αφού από το ισόγειο ο ανελκυστήρας δεν μπορεί να κατεβεί δύο φορές (δεν υπάρχει όροφος κάτω από το υπόγειο).

Θεωρήστε τη γλώσσα  $\Lambda \subseteq \{U,D\}^*$  που περιλαμβάνει όλες τις λέξεις που αναπαριστούν δυνατές κινήσεις του ανελκυστήρα. Να δώσετε μια κανονική έκφραση για τη γλώσσα  $\Lambda$  και να εξηγήσετε την απάντησή σας.

### Άσκηση 2 [12 μονάδες]

Θεωρήστε το μη ντετερμινιστικό αυτόματο  $(Q, \Sigma, \delta, 1, F)$  με

- σύνολο καταστάσεων το  $Q = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ ,
- αλφάβητο το  $\Sigma = \{a,b\}$ ,
- σύνολο τελικών καταστάσεων το  $F = \{6\}$ , και
- συνάρτηση μεταβάσεων  $\delta$  όπως ορίζεται στον πίνακα που ακολουθεί:

$\delta$	$a$	$b$	$\epsilon$
1	{4,5}	$\emptyset$	{2}
2	{3}	$\emptyset$	$\emptyset$
3	{6}	{1}	$\emptyset$
4	$\emptyset$	{5}	$\emptyset$
5	$\emptyset$	{2}	{2,6}
6	$\emptyset$	{6}	$\emptyset$

(α) Να παρουσιάσετε το αυτόματο γραφικά μέσω ενός διαγράμματος μεταβάσεων.

(β) Να μετατρέψετε το αυτόματο από το σκέλος (α) σε ένα ισοδύναμο ντετερμινιστικό αυτόματο χρησιμοποιώντας τον σχετικό αλγόριθμο (Διαφάνειες 2-37 – 2-38).

### **Άσκηση 3 [25 μονάδες]**

(α) Θεωρήστε τις πιο κάτω γλώσσες:

$$\Lambda_1 = \{ w \in \{a,b\}^* \mid \text{ο αριθμός των } a \text{ στην } w \text{ είναι πολλαπλάσιο του } 3 \}$$

$$\Lambda_2 = \{ w \in \{a,b\}^* \mid \eta \ w \ \text{τελειώνει σε } a \}$$

(i) Να κατασκευάσετε αυτόματα  $A_1$  και  $A_2$  που να αναγνωρίζουν τις γλώσσες  $\Lambda_1$  και  $\Lambda_2$ , αντίστοιχα.

(ii) Να μετατρέψετε το αυτόματο  $A_1$  σε ένα καινούριο αυτόματο  $A_3$  που να αναγνωρίζει το συμπλήρωμα της γλώσσας  $\Lambda_1$ .

(iii) Να συνδυάσετε τα αυτόματα  $A_2$  και  $A_3$  για να δημιουργήσετε ένα καινούριο αυτόματο  $B$  το οποίο να αναγνωρίζει την πιο κάτω γλώσσα:

$$\Lambda = \{ w \in \{a,b\}^* \mid \text{ο αριθμός των } a \text{ στην } w \text{ δεν είναι πολλαπλάσιο του } 3 \text{ και } \eta \ w \ \text{τελειώνει σε } a \}$$

(iv) Να μετατρέψετε το αυτόματο  $B$  σε ισοδύναμη κανονική έκφραση χρησιμοποιώντας τον σχετικό αλγόριθμο (Διαφάνεια 3-20).

### **Άσκηση 4 [35 μονάδες]**

Να αποφασίσετε κατά πόσο οι πιο κάτω γλώσσες είναι κανονικές αιτιολογώντας με ακρίβεια τις απαντήσεις σας.

(α)  $\{a^m b^n \mid n, m \geq 0, \text{ το } m \text{ είναι άρτιος ακέραιος αν και μόνο αν το } n \text{ είναι άρτιος ακέραιος}\}$

(β)  $\{c^n a^m c^k b^n \mid n, m, k \geq 0\}$

(γ)  $\{(10)^m 1^n \mid m \geq n \geq 0\}$

(δ)  $\{(10)^m 1(01)^n \mid m \geq n \geq 0\}$

(ε)  $\{a^{n^3} \mid n \geq 0\}$

### **Άσκηση 5 [16 μονάδες]**

Ένα πεπερασμένο αυτόματο με απαγορεύσεις (για συντομία ΠΑΑ) αποτελεί μια πλειάδα  $(Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ , όπου  $Q$  είναι το σύνολο καταστάσεων του αυτόματου, με  $q_0$  την αρχική κατάσταση,  $F$  το σύνολο με τις καταστάσεις αποδοχής του αυτόματου,  $\Sigma$  το αλφάβητο του αυτομάτου, και  $\delta: (Q \times (\Sigma \cup \bar{\Sigma})) \rightarrow Q$  τη συνάρτηση μεταβάσεων του αυτόματου. Η διαφορά ενός ΠΑΑ από ένα DFA εντοπίζεται στο γεγονός ότι οι μεταβάσεις του μεταγράφονται με σύμβολα από το σύνολο  $\Sigma \cup \bar{\Sigma}$ , όπου  $\bar{\Sigma} = \{\bar{a} \mid a \in \Sigma\}$ . Διαισθητικά, αν  $\delta(q, \bar{a}) = t$ , τότε κάθε φορά που το αυτόματο βρίσκεται στην κατάσταση  $q$  και το σύμβολο εισόδου **δεν είναι** το  $a$ , το αυτόματο προχωρά στην κατάσταση  $t$ .

Να αποδείξετε ότι η κλάση των γλωσσών που αποδέχονται τα ΠΑΑ είναι η ίδια με την κλάση των γλωσσών που αποδέχονται τα DFA, δηλαδή, οι κανονικές γλώσσες.