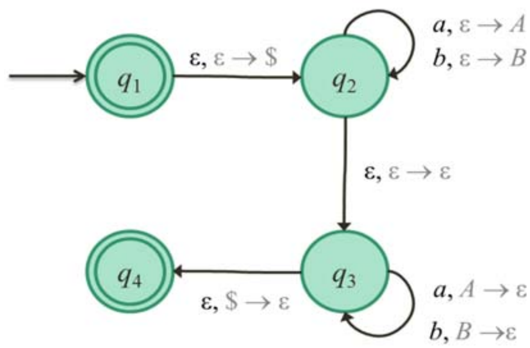
Φροντιστήριο 7, 04/03/20

Άσκηση 1

Θεωρήστε το πιο κάτω αυτόματο στοίβας:



(α) Να εξηγήσετε με λόγια ποια γλώσσα αναγνωρίζεται από το αυτόματο.

(β) Να δώσετε τον τυπικό ορισμό του αυτομάτου.

(γ) Να δείξετε όλα τα μονοπάτια που αντιστοιχούν στην ανάγνωση των λέξεων *aab* και *aabb*.

(δ) Να δείξετε ότι οι λέξεις *aaaa* και *baab* ανήκουν στη γλώσσα του αυτομάτου.

Άσκηση 2

Να κατασκευάσετε αυτόματα στοίβας που να αναγνωρίζουν τις πιο κάτω γλώσσες.

(α) $\{0^n1^{2n} \mid n > 0\}$

(β) $\{a^ib^jc^k \mid i, j, k \geq 0$ και $i + j = k\}$

Άσκηση 3

Για κάθε μια από τις πιο κάτω γραμματικές να κατασκευάσετε ένα ισοδύναμο αυτόματο στοίβας.

(α)

$$E \to E + T \mid T$$
$$T \to T \times F \mid F$$
$$F \to (E) \mid a$$

(β)

$$S \to 1A1 \mid 0A0 \mid 1 \mid 0$$
$$A \to 1A \mid 0A \mid \varepsilon$$

Άσκηση 4

Να δείξετε ότι οι πιο κάτω γλώσσες δεν είναι ασυμφραστικές αιτιολογώντας με ακρίβεια τις απαντήσεις σας.

(α) $\{a^n\#a^{2n}\#a^{3n} \mid n > 0\}$

(β) $\{a^ib^jc^k \mid k = \max(i, j)\}$

Σύνοψη: Αυτόματα Στοίβας (PDA)

ΟΡΙΣΜΟΣ

Αυτόματο στοίβας είναι μια εξάδα $(\mathrm{Q}, \Sigma, \Gamma, \delta, \mathrm{q}_0, \mathrm{F})$, όπου

1. Q είναι ένα πεπερασμένο σύνολο, τα στοιχεία του οποίου ονομάζονται καταστάσεις,
2. Σ είναι ένα πεπερασμένο σύνολο, που ονομάζεται αλφάβητο,
3. Γ είναι ένα πεπερασμένο σύνολο, που ονομάζεται αλφάβητο στοίβας
4. $\delta: \mathrm{Q} \times \Sigma_\varepsilon \times \Gamma_\varepsilon \to \mathcal{P}(\mathrm{Q} \times \Gamma_\varepsilon)$, είναι η συνάρτηση μεταβάσεων,
5. $\mathrm{q}_0 \in \mathrm{Q}$ είναι η εναρκτήρια κατάσταση,
6. $\mathrm{F} \subseteq \mathrm{Q}$ είναι το σύνολο των καταστάσεων αποδοχής .

ΟΡΙΣΜΟΣ ΤΟΥ ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΥ

- Το αυτόματο στοίβας $M = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, F)$ *αποδέχεται* μια λέξη w αν αυτή μπορεί να γραφτεί στη μορφή $w = w_1 w_2 \ldots w_m$ όπου κάθε $w_i \in \Sigma_\varepsilon$, και αν υπάρχει ακολουθία καταστάσεων $r_0, r_1, \ldots, r_m \in Q$ και ακολουθία λέξεων $s_0, s_1, \ldots, s_m \in \Gamma^*$ που να ικανοποιούν τις συνθήκες:
  - $r_0 = q_0$ και $s_0 = \varepsilon$
  - Για κάθε $i = 0, \ldots, m-1$, $(r_{i+1}, \mathrm{b}) \in \delta(r_i, w_{i+1}, a)$, όπου $s_i = at$ και $s_{i+1} = bt$ για κάποια $a, b \in \Gamma_\varepsilon$ και $t \in \Gamma^*$, και
  - $r_m \in F$
- Το αυτόματο Μ *αναγνωρίζει* τη γλώσσα Α αν:
  Α = {w | το Μ αποδέχεται την w}

ΛΗΜΜΑ

Αν μια γλώσσα είναι ασυμφραστική, τότε υπάρχει αυτόματο στοίβας που την αναγνωρίζει.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

Έστω γραμματική G. Το *ισοδύναμο αυτόματο στοίβας* $(Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_{start}, \{q_{end}\})$ ορίζεται ως εξής:

$Q = \{ q_{start}, q_{loop}, q_{end} \} \cup E$

- Όπου E είναι το σύνολο των καταστάσεων που απαιτούνται για τις αντικαταστάσεις των μεταβλητών με λέξεις
- Η συνάρτηση μεταβάσεων είναι η εξής:
  - $\delta(q_{start}, \varepsilon, \varepsilon) = \{(q_{loop}, S\$)\}$
  - $\delta(q_{loop}, \varepsilon, A) = \{(q_{loop}, w) \mid$ υπάρχει κανόνας $A \to w$ στη γραμματική$\}$
  - $\delta(q_{loop}, a, a) = \{(q_{loop}, \varepsilon)\}$
  - $\delta(q_{loop}, \varepsilon, \$) = \{(q_{end}, \varepsilon)\}$

Λήμμα της Άντλησης

Για κάθε ασυμφραστική γλώσσα A, υπάρχει αριθμός p (το *μήκος άντλησης* αυτής) τέτοιος ώστε κάθε λέξη w της A με μήκος μεγαλύτερο ή ίσο του p να μπορεί να χωριστεί σε πέντε τμήματα, $w = uvxyz$, που να ικανοποιούν τις εξής συνθήκες:

1. Για κάθε $i \geq 0$, $uv^i xy^i z \in A$,
2. $|vy| > 0$, και
3. $|vxy| \leq p$.